

Étude théorique sur les courants induits

PAR

M. M. BIOT

C. R. B. Fellow

Docteur en Sciences Physiques et Mathématiques
Ingénieur Civil des Mines, Ingénieur Électricien U. I. Lv.

RÉSUMÉ. — Le premier chapitre de la présente étude expose certaines considérations générales sur les solutions des équations de Maxwell dans le cas des champs sinusoïdaux lorsque le courant de déplacement est négligeable. L'application de l'intégrale de Fourier permet théoriquement de passer des solutions sinusoïdales aux solutions quelconques.

Le deuxième chapitre comprend deux paragraphes

Le premier étudie par la méthode précédente les courants engendrés localement dans un conducteur lorsque le courant pénètre à une profondeur faible relativement au rayon de courbure. Le deuxième paragraphe présente le calcul des courants induits dans une sphère conductrice homogène par un champ magnétique uniforme alternatif sinusoïdal. La solution met en évidence le phénomène du Skin effect, l'influence de la courbure sur la pénétration du courant ; elle montre aussi que le problème n'est pas local et dans quelle mesure en H. F. le courant pelliculaire en chaque point est influencé par le champ des courants induits dans toutes les portions de la surface. L'évaluation de la perte par effet Joule donne des formules dont l'application pourrait être faite au calcul des fours à induction.

Le troisième chapitre expose une théorie spéciale au calcul des courants induits dans les plaques, et montre qu'il se réduit à la solution de l'équation du potentiel avec une condition à l'infini et une autre à la surface de la plaque. Celle-ci d'un type nouveau relie linéairement la discontinuité de la dérivée normale seconde à la dérivée normale première.

Trois applications de la méthode sont ensuite présentées. Les deux premières concernent le calcul des courants induits dans un cylindre par un champ uniforme perpendiculaire aux génératrices et dans une sphère creuse, ainsi que l'évaluation du degré de pénétration des champs de H. F. dans l'espace intérieur. La troisième traite le problème général du calcul des courants induits dans une plaque indéfinie par un champ magnétique quelconque. La question est résolue par le calcul d'une fonction type (analogue à celle $1/r$ pour l'équation du potentiel) qui donne le courant induit par un flux réduit à une seule ligne de force. Cette solution permet de trouver les courants induits dans une plaque finie à faible courbure et de prévoir si l'influence des bords est négligeable. Ces derniers résultats sont susceptibles d'applications techniques dans le domaine de la construction des appareils de mesure.

Cette étude a été faite à l'Institut de physique de l'Université de Louvain, sous la direction de MM. les professeurs G. Lemaitre et C. Manneback.

Étude théorique sur les courants induits

I. — CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

Un conducteur homogène de forme et de nature déterminées étant plongé dans un champ magnétique inducteur connu, proposons-nous de calculer les courants induits en chaque point dans sa masse. Partons pour cela des équations de Maxwell et de la loi d'Ohm généralisée.

$$\begin{aligned}\text{Curl } \mathcal{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \text{Curl } \mathbf{H} &= \frac{\mathbf{K}}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{4\pi u}{c} \\ \text{div}(\mathbf{K}\mathcal{E}) &= 4\pi\rho \\ \text{div}(\mu\mathbf{H}) &= 0 \\ u &= \gamma\mathcal{E}\end{aligned}$$

Les grandeurs \mathcal{E} , \mathbf{K} , u , γ , ρ sont exprimées en *u. e. s.*; celles μ et \mathbf{H} en *u. e. m.*

Dans toute cette étude, nous supposerons négligeable le courant de déplacement $\frac{\mathbf{K}}{4\pi} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$ vis-à-vis du courant de conduction u , ainsi que la charge ρ , et nous nous limiterons au cas d'un champ inducteur alternatif sinusoïdal.

Ces équations deviennent après élimination de u , et introduction des valeurs complexes

$$\begin{aligned}\text{Curl } \mathcal{E} &= \alpha\mathbf{H} \\ \text{Curl } \mathbf{H} &= \beta\mathcal{E} \\ \text{div } \mathcal{E} &= 0 \\ \text{div } \mathbf{H} &= 0\end{aligned} \quad \begin{aligned}\alpha &= -\frac{i\omega\mu}{c} \\ \beta &= \frac{4\pi\gamma}{c}\end{aligned}$$

Les valeurs des champs auront ici la forme complexe.

On peut se proposer de rechercher l'un des champs \mathbf{H} ou \mathcal{E} .

L'élimination de \mathcal{E} , par exemple, donne

$$\Delta\mathbf{H} = -\alpha\beta\mathbf{H} \quad (1) \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

de même

$$\Delta\mathcal{E} = -\alpha\beta\mathcal{E}. \quad (2)$$

Notons que ces équations s'appliquent à chacune des projections cartésiennes des vecteurs.

Soit à calculer le champ magnétique \mathbf{H} intérieur et extérieur; ce dernier comprenant une composante \mathbf{H}_e due aux courants et la composante $\bar{\mathbf{H}}$ constituant le champ inducteur.

Le champ intérieur H satisfait à l'équation (1) et H_e dérive d'un potentiel V . Les conditions aux limites sont :

1° L'annulation de la composante normale de $\text{Curl } H$ et la continuité des composantes tangentielles des champs résultants totaux à la surface du conducteur ;

2° L'annulation des dérivées de V à l'infini, asymptotiquement à $1/r^2$.

Mathématiquement le problème ainsi posé admet une solution unique.

Supposons, en effet, qu'il existe deux champs H_1 et H_2 correspondant aux courants u_1 et u_2 et répondant à des conditions aux limites identiques. La différence des solutions $H_1 - H_2$, $u_1 - u_2$ est une solution correspondant à un champ inducteur nul. L'application du théorème de Poynting montre que cette solution ne peut être que nulle.

Le procédé de résolution est donc le suivant :

Calculer la solution générale donnant le champ à l'intérieur, puis celle donnant les champs extérieurs ; exprimer ensuite la condition de continuité des composantes tangentielles des deux champs à la surface, ce qui permettra de calculer les constantes arbitraires des solutions générales.

Afin d'illustrer ces considérations, nous allons les appliquer d'abord au calcul des courants dans un conducteur semi-infini limité par un plan et dans une sphère homogène.

II. — COURANTS DANS LES CONDUCTEURS PLEINS

§ 1. — *Conducteur semi-infini non-magnétique limité par un plan, dans un champ inducteur magnétique uniforme alternatif sinusoïdal*

Physiquement le plan en question doit être considéré comme étant une portion restreinte de la surface d'un conducteur non-magnétique ($\mu = 1$) de forme quelconque à courbure finie et le champ inducteur \bar{H}_1 comme composé du champ inducteur \bar{H} proprement dit, et de celui qui résulte des courants induits dans les autres régions du conducteur.

Prenons pour axe des z la normale au plan vers l'intérieur, l'origine étant dans ce plan, et le plan yz parallèle au champ inducteur total \bar{H}_1 .

Remarquons que \bar{H}_1 est nécessairement parallèle à la surface du conducteur, car, le champ total étant nul à une certaine profondeur, \bar{H}_1 doit être égal et directement opposé au champ qui résulte des courants induits dans la portion restreinte de surface considérée, \bar{H}_1 est égal à m fois la composante tangentielle de \bar{H} soit $\bar{H}m \sin \theta$. Le champ total est parallèle au conducteur et vaut $2\bar{H}m \sin \theta$. La valeur de m ne peut s'évaluer que par la résolution du problème pour la surface entière du conducteur ainsi qu'il sera fait au § 2 pour la sphère.

Examinons ce qui se passe à l'intérieur du conducteur. L'équation (2) devient, en posant $\alpha\beta = \frac{4}{c^2} \pi\gamma\mu\omega i = k^2$,

$$\Delta \mathcal{E}_x = -k^2 \mathcal{E}_x.$$

Posons $\mathcal{E}_x = E$, il vient

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k^2 E = 0$$

d'où pour la valeur du champ électrique intérieur au conducteur

$$E = Ae^{-ikz}$$

Cette relation satisfait bien à la condition $E = 0$ pour $z = \infty$.

Posons en effet
$$\delta = \frac{1}{c} \sqrt{2\pi\gamma\mu\omega}$$

$$\delta z = z$$

d'où
$$k = \delta(1 - i) \quad \text{et} \quad kz = z(1 - i).$$

On voit que

$$E = Ae^{-z(1-i)}.$$

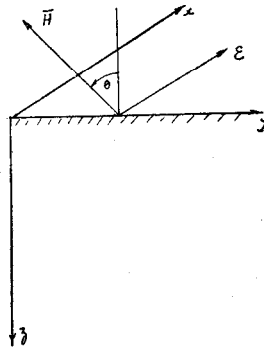


FIG. 1.

Le champ magnétique total intérieur s'en déduit

$$(\mathbf{H}_\nu) = \frac{1}{\alpha} \text{Curl}_\nu \mathcal{E} = \frac{1}{\alpha} \frac{dE}{dz} = \frac{Ac\delta\sqrt{2}}{\omega\delta} e^{-z(1+i) - \frac{\pi}{4}i}.$$

Par suite de la continuité, il faut que (\mathbf{H}_ν) à la surface ($z = 0$) soit égal à la valeur $-2\bar{H}m \sin \theta$ du champ extérieur, d'où

$$(\mathbf{H}_\nu)_{z=0} = \frac{Ac\delta}{\omega\mu} \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i} = -2\bar{H}m \sin \theta.$$

On en tire
$$A = \frac{2\omega\mu}{c\delta\sqrt{2}} \bar{H}m \sin \theta e^{-\frac{3}{4}\pi i}$$

$$E = \frac{2\omega\mu}{c\delta\sqrt{2}} \bar{H}m e^{-z(1+i) - \frac{3}{4}\pi i} \sin \theta$$

$$u = \frac{\bar{H}m c\delta}{\pi\sqrt{2}} e^{-z(1+i) - \frac{3}{4}\pi i} \sin \theta.$$

Valeur numérique de δ pour le cuivre et la fréquence de 50 sec⁻¹

$$\gamma = 5,4 \cdot 10^{17} \text{ u. e. s.}$$

$$\omega = 314$$

$$\mu = 1$$

$$\delta = \frac{1}{c} \sqrt{2\pi\gamma\mu\omega} = 1,088 \text{ cm}^{-1}.$$

§ 2. — *Courants de Foucault induits dans une sphère homogène plongée dans un champ magnétique uniforme alternatif sinusoïdal*

Prenons le centre de la sphère comme origine des coordonnées, et l'axe des z dirigé suivant le champ magnétique inducteur. Ce champ a pour composantes en notation complexe :

$$\bar{H}_x = 0 \quad \bar{H}_y = 0 \quad \bar{H}_z = \bar{H} e^{i\omega t}$$

Le phénomène est à symétrie de révolution autour de z , c'est-à-dire que le champ électrique est tangent aux parallèles et le champ magnétique est situé dans un plan méridien. L'un et l'autre dépendent uniquement de r et θ .

Le procédé le plus commode consiste à utiliser les coordonnées polaires. Nous calculerons la solution générale intérieure puis extérieure pour \mathcal{E} , nous en déduirons H , et nous ferons ensuite le raccordement de ces solutions.

Solution intérieure à la sphère

Posons
$$\alpha\beta = k^2$$

L'équation (2) s'écrit pour l'une des projections

$$\Delta \mathcal{E}_x = k^2 \mathcal{E}_x$$

Par suite de la symétrie, on peut écrire

$$\mathcal{E}_x = -E \sin \varphi$$

où E est la valeur absolue du champ électrique indépendante de φ .

Écrivant le Laplacien en coordonnées polaires et développant, il vient

$$\Delta \mathcal{E}_x = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial \varphi^2} \right] = k^2 \mathcal{E}_x$$

et, après suppression du facteur commun $\sin \theta$,

$$-k^2 E = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial E}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial E}{\partial \theta} \right) - \frac{E}{\sin^2 \theta} \right].$$

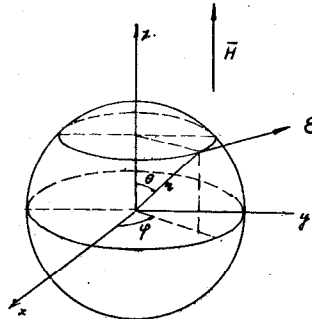


FIG. 2.

Cette équation est du type de celle régissant la propagation de la chaleur en régime permanent où E joue le rôle de la température.

Posons $E = R(r) Y(\theta)$.

Nous obtenons ainsi deux équations différentielles ordinaires :

$$(3) \quad \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] R = 0.$$

$$(4) \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] Y = 0.$$

La première se ramène à une équation de Bessel par le changement de variable

$$R = \frac{u}{\sqrt{r}}.$$

On trouve en effet

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left[k^2 - \frac{\left(n + \frac{1}{2} \right)^2}{r^2} \right] u = 0$$

Cette équation admet pour solution finie à l'origine la fonction de 1^{re} espèce

$$u = \sqrt{\frac{\pi}{2}} A_n J_{n+\frac{1}{2}}(kr)$$

d'où pour R la valeur

$$R_n = A_n \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}}.$$

Cette fonction est également finie à l'origine, comme on s'en rend compte en la développant en série potentielle.

L'équation (4) a pour solution les fonctions sphériques

$$Y_n = P_n^1(\cos \theta) = \sin \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d(\cos \theta)}.$$

La solution générale intérieure est donc de la forme

$$E = \sum R_n Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}} P_n^1(\cos \theta).$$

Solution extérieure à la sphère

À l'extérieur de la sphère la conductibilité γ est nulle ($k = 0$). E satisfait alors à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial E}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial E}{\partial \theta} \right) - \frac{E}{\sin \theta} = 0.$$

La solution est un potentiel sphérique. Considérons la partie E_e du champ électrique extérieur dû aux courants induits. Comme elle s'annule à l'infini, la solution à choisir est de la forme

$$E_e = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{P_n^1(\cos \theta)}{r^{n+1}}.$$

Le champ électrique extérieur total doit comprendre une seconde composante \bar{E} qui ne soit pas de l'ordre de $\frac{1}{r^2}$ à l'infini, et telle que les équations de Maxwell y soient encore vérifiées.

Par suite de la symétrie de révolution autour de z du champ \bar{H} , le champ \bar{E} doit être constant le long d'un parallèle et tangent à celui-ci. La valeur absolue est donc de la forme (solution de l'équation précédente)

$$\bar{E} = \sum B_n' r^n P_n^1(\cos \theta).$$

Développons H_θ en série de $P_n^1(\cos \theta)$ sur la sphère conductrice de rayon a

$$\bar{H}_\theta = \sum D_n P_n^1(\cos \theta),$$

or, $\text{Curl}_\theta \epsilon = \alpha' H_\theta$ où $\alpha' = -\frac{i\omega\mu'}{c}$ relatif au milieu extérieur,

il vient ainsi

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\bar{E}) = \alpha' \Sigma D_n P_n^1(\cos \theta)$$

$$-\Sigma (n+1) B'_n r^{n-1} P_n^1(\cos \theta) = \alpha' \Sigma D_n P_n^1(\cos \theta)$$

d'où

$$B'_n = -\frac{\alpha' D_n}{(n+1) a^{n-1}}.$$

Nous connaissons donc la valeur des coefficients B'_n entrant dans l'expression de \bar{E} .

Calcul du champ magnétique

Nous pouvons facilement le déduire du champ électrique par la formule

$$H = \frac{1}{\alpha} \text{Curl } E, \quad \alpha = -\frac{i\omega\mu}{c}.$$

La question revient à évaluer les deux composantes (Curl_r) radiale et (Curl_θ) méridienne du Curl en coordonnées polaires. Une remarque permet de simplifier considérablement les calculs. En appliquant le théorème de Stokes à une aire infiniment petite, nous voyons que la projection du Curl sur une normale à cette aire est égale au quotient par cette aire de la circulation du vecteur le long de son contour. Ceci nous donne

$$\text{Curl}_r \mathcal{E} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [E \sin \theta],$$

$$\text{Curl}_\theta \mathcal{E} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [rE].$$

Les composantes méridiennes du champ magnétique induit ont donc pour expressions respectives, à l'intérieur et à l'extérieur,

$$H_\theta = \frac{1}{\alpha} \text{Curl}_\theta \mathcal{E} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha r} \frac{d}{dr} \left[r \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}} \right] P_n^1(\cos \theta).$$

En posant

$$\mathcal{F}_{n+\frac{1}{2}}(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}} \right],$$

$$H_\theta = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha} \mathcal{F}_{n+\frac{1}{2}}(r) P_n^1(\cos \theta),$$

$$H_{\theta e} = \frac{1}{\alpha'} \text{Curl}_{\theta} \epsilon_e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n C_n}{\alpha' r^{n+2}} P_n^1(\cos \theta),$$

avec $\alpha' = -\frac{i\omega\mu'}{c}$ où μ' est relatif au milieu extérieur. La composante méridienne du champ extérieur total s'écrit en ajoutant le champ inducteur.

Raccordement des solutions — Calcul des coefficients

Les solutions que nous avons établies pour les problèmes intérieurs et extérieurs comportent des coefficients indéterminés que nous allons maintenant calculer en appliquant la condition de continuité des composantes tangentielles des champs à la surface du conducteur.

Supposons d'abord le cas général d'un champ inducteur non uniforme (fonction de r et θ et situé dans le plan méridien. Développons H_{θ} sur la sphère en série de $P_n^1(\cos \theta)$

$$\bar{H} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n P_n^1(\cos \theta).$$

Les conditions de continuité s'écrivent dès lors en appelant a le rayon de la sphère conductrice

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(ka)}{\sqrt{ka}} P_n^1(\cos \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{P_n^1(\cos \theta)}{a^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha' D_n a P_n^1(\cos \theta)}{n+1},$$

$$H_{\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha} \mathcal{F}_{n+\frac{1}{2}}(a) P_n^1(\cos \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n C_n}{\alpha' a^{n+2}} P_n^1(\cos \theta) - \sum_{n=1}^{\infty} D_n P_n^1(\cos \theta).$$

On trouve ainsi pour chaque valeur de n un système de deux équations déterminant les deux constantes A_n et C_n en fonction de D_n

$$(6) \quad \begin{aligned} A_n \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(ka)}{\sqrt{ka}} &= \frac{C_n}{a^{n+1}} - \frac{\alpha' a}{n+1} D_n, \\ A_n \frac{\alpha \mu'}{n \mu} \mathcal{F}_{n+\frac{1}{2}}(a) &= -\frac{C_n}{\alpha' a^{n+1}} + \frac{\alpha' a}{n} D_n. \end{aligned}$$

La solution définitive est donc entièrement déterminée par la composante tangentielle du champ magnétique inducteur sur la surface de la sphère.

Calcul des coefficients

Nous supposons dans ce qui suit, un champ inducteur uniforme.

Dans ces conditions, le développement de \bar{H}_θ se réduit à

$$\bar{H}_\theta = -\bar{H} \sin \theta = -\bar{H} P_1^1(\cos \theta)$$

d'où $D_1 = -\bar{H} \quad D_n = 0. \quad (n \neq 1)$

Les équations (6) deviennent

$$A \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{3/2}(ka)}{\sqrt{ka}} = \frac{C}{a^2} + \frac{a\alpha'}{2} \bar{H}$$

$$Aa \frac{\mu'}{\mu} \mathcal{F}_{3/2}(a) = \frac{C}{a^2} - a\alpha' \bar{H}.$$

On en tire

$$A = \frac{3}{2} \cdot \frac{\bar{H}\alpha'a}{\left(r \frac{d}{dr} + 2\right)_a \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{3/2}(kr)}{\sqrt{kr}} + \left(1 - \frac{\mu'}{\mu}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{3/2}(ka)}{\sqrt{ka}}}$$

Rappelons que nous avons posé

$$k^2 = \alpha\beta = -\frac{4\pi\omega\mu\gamma i}{c^2}$$

de sorte que k est complexe de même que la fonction où ce coefficient intervient. Afin de séparer les parties réelles et imaginaires remarquons que les fonctions de Bessel d'ordre $n + \frac{1}{2}$ s'expriment rationnellement par les fonctions élémentaires ; notamment

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{3/2}(kr)}{\sqrt{kr}} = \frac{1}{kr} \left(\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr \right)$$

Il vient :

$$\left(r \frac{d}{dr} + 2\right) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{3/2}(kr)}{\sqrt{kr}} = \sin kr.$$

Posons

$$\delta = \frac{1}{c} \sqrt{2\pi\gamma\mu\omega}$$

$$\delta r = \rho$$

$$\rho a = \rho_0$$

d'où

$$kr = \rho(1 - i)$$

$$ka = \rho_0(1 - i)$$

Posons encore

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{3/2}(kr)}{\sqrt{kr}} = f(\rho) e^{\psi i}$$

$$\operatorname{tg} \nu_0 = \frac{\operatorname{tg} \rho_0}{\operatorname{th} \rho_0}$$

$$g\left(\rho_0 \frac{\mu}{\mu'}\right) = i \left[\frac{\mu}{\mu'} - 1 \right] f(\rho_0) e^{\psi_0 i} + \frac{\mu}{\mu'} \sqrt{\operatorname{Sh}^2 \rho_0 + \sin^2 \rho_0} e^{i\nu_0}$$

ψ_0 étant la valeur de ψ pour $\rho = \rho_0$.

La valeur du coefficient A s'écrit alors

$$A = \frac{3}{2c} \frac{a\omega\mu\bar{H}}{g\left(\rho_0 \frac{\mu}{\mu'}\right)}$$

Celle du coefficient C se tire facilement des équations (10').

$$\text{Il vient} \quad C = Aa^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{3/2}(ka)}{\sqrt{ka}} - \frac{a^3 \alpha'}{2} \bar{H}$$

En tenant compte des valeurs précédentes,

$$C = \frac{3}{2c} a^3 \mu \omega \bar{H} \cdot \frac{f(\rho_0)}{g\left(\rho_0 \frac{\mu}{\mu'}\right)} e^{\psi_0 i} - \frac{a^3 \alpha'}{2} \bar{H}.$$

Nous sommes ainsi en possession des valeurs des coefficients qui entrent dans les expressions des champs. Il nous reste encore à calculer la fonction

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{3/2}(kr)}{\sqrt{kr}}$$

en séparant les parties réelles et imaginaires.

$$\text{Calcul de } \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{J_{3/2}(kr)}{\sqrt{kr}}$$

En remplaçant $J_{3/2}(kr)$ par son expression sous forme de fonction élémentaire, il vient

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{3/2}(kr)}{\sqrt{kr}} = \frac{1}{kr} \left(\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr \right).$$

Introduisons la variable sous forme complexe

$$kr = \rho(1 - i)$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{3/2}(kr)}{\sqrt{kr}} = \frac{1}{2\rho} \left[\frac{1}{\rho} \cos \rho \operatorname{Sh} \rho - (\cos \rho \operatorname{Ch} \rho - \sin \rho \operatorname{Sh} \rho) \right] \\ + \frac{i}{2\rho} \left[\frac{1}{\rho} \sin \rho \operatorname{Ch} \rho - (\cos \rho \operatorname{Ch} \rho + \sin \rho \operatorname{Sh} \rho) \right].$$

Posons
$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{3/2}(kr)}{\sqrt{kr}} = f(\rho) e^{i\psi} = X + Yi$$

où les grandeurs ψ , X , Y , sont uniquement fonctions de la variable réduite ρ .

Allure de la fonction à l'origine.

Par développement en série potentielle, il vient

$$\frac{1}{x} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) = \frac{x}{3} - \frac{x^3}{30} + \frac{x^5}{840}$$

d'où
$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{3/2}(kr)}{\sqrt{kr}} = \frac{\rho}{3} + \frac{\rho^3}{15} - \frac{\rho^5}{210} - \dots - i \left(\frac{\rho}{3} - \frac{\rho^3}{15} + \frac{\rho^5}{210} + \dots \right)$$

En se limitant aux deux premiers termes l'erreur pour $\rho < \frac{1}{2}$ est inférieure à 0,0002. Il vient alors avec cet ordre d'approximation

$$f(\rho) = \frac{\rho}{3} \sqrt{2} \left(1 + \frac{\rho^2}{50} \right)$$

$$\operatorname{tg}(\psi) = -1 + \frac{2}{5} \rho^2 \quad \psi = -\frac{\pi}{4} + \frac{\rho^2}{5}.$$

Allure asymptotique de la fonction.

Le $\operatorname{Ch} \rho$ tend asymptotiquement vers $\operatorname{Sh} \rho$, car

$$\operatorname{Ch} \rho - \operatorname{Sh} \rho = e^{-\rho}$$

D'autre part, pour les grandes valeurs de ρ les termes $\frac{1}{\rho} \sin \rho \operatorname{Ch} \rho$ et $\frac{1}{\rho} \cos \rho \operatorname{Sh} \rho$ sont négligeables devant les autres.

La valeur asymptotique est donc

$$\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{3/2}(kr)}{\sqrt{kr}} \right)_{\rho=\infty} \rightarrow \frac{e^{\rho}}{\rho \sqrt{8}} e^{i \left(\rho - \frac{3\pi}{4} \right)}$$

En appliquant cette formule pour $\rho = 4\pi$, on trouve $f(\rho) = 7600$ au lieu de 7300 valeur exacte, soit une erreur de 4 %.

L'erreur de phase est $2^{\circ} 20'$.

VALEURS INTERMÉDIAIRES DE LA FONCTION

ρ	X	Y	$f(\rho)$	ψ
0	0	0	0	— 45°
$\frac{\pi}{4}$	0,295	— 0,230	0,374	— 38°
$\frac{\pi}{2}$	0,725	— 0,255	0,800	— 19°20'
$\frac{3\pi}{4}$	1,31	0,355	1,35	15 10'
π	1,21	1,77	2,15	55°40'
$\frac{5\pi}{4}$	— 0,567	3,92	4,0	100°
$\frac{3\pi}{2}$	— 5,84	4,6	7,45	142°
$\frac{7\pi}{4}$	— 11,7	— 1,16	11,8	185°40'
2π	— 17,1	— 20,4	26,7	230°
3π	273	305	410	360° + 41°40'
4π	— 4970	— 5400	7300	$2 \times 360^\circ - 132^\circ 40'$

Calcul des champs et courants. — Discussion

Connaissant l'allure et les valeurs principales des fonctions qui nous occupent, nous sommes en mesure d'appliquer nos formules au calcul définitif des diverses grandeurs physiques intervenant dans le problème.

Afin de fixer les idées sur l'ordre de grandeur du phénomène, rappelons que pour une sphère de cuivre à la fréquence 50 sec^{-1} la valeur de δ calculée plus haut (§ 1) vaut

$$\delta = 1,088 \text{ cm}^{-1}.$$

En reportant la valeur de A dans l'expression du champ électrique intérieur, et en tenant compte de ce que

$$P_1^1(\cos \theta) = \sin \theta,$$

il vient

$$E = \frac{3}{2c} a\omega\mu\bar{H} \frac{f(\rho)}{g\left(\rho_0 \frac{\mu}{\mu'}\right)} e^{\psi i} \sin \theta.$$

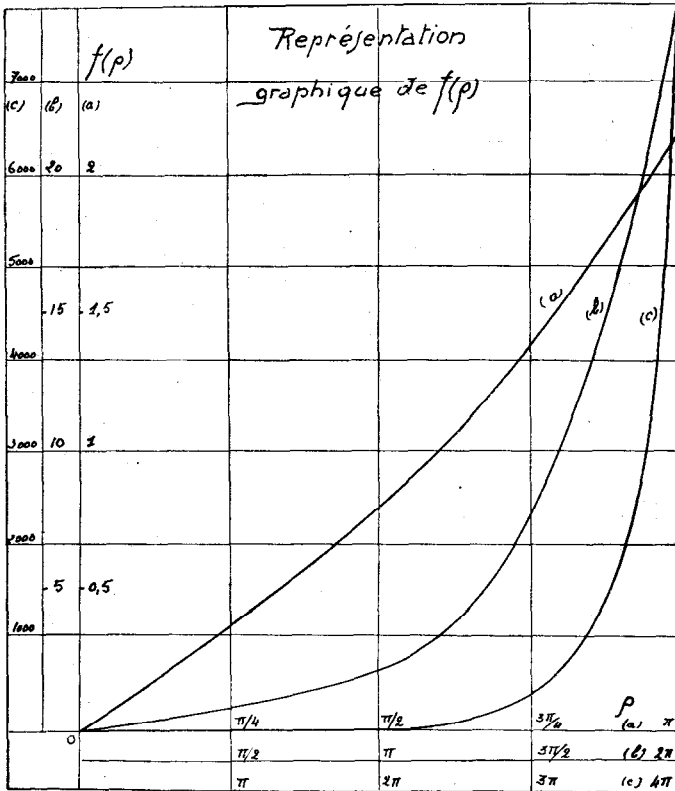


FIG. 3.

La valeur du courant se déduit de

$$u = E\gamma,$$

soit

$$u = \frac{3}{2} \frac{\bar{H}c}{\pi a} \cdot \frac{\rho_o^2}{g\left(\rho_o \frac{\mu}{\mu'}\right)} f(\rho) e^{\psi i} \sin \theta.$$

Cette formule montre, d'après l'allure de la fonction $f(\rho)$, que le courant a tendance à s'accumuler à la surface et principalement sur l'équateur (Skin effect). Cet effet est d'autant plus considérable que la valeur réduite ρ_o est plus élevée.

Supposons que l'une des grandeurs, rayon, conductibilité, perméabilité ou fréquence soit grande, ρ_o est alors une quantité grande (pratiquement $\rho_o > 4\pi$). La valeur asymptotique du courant a pour expression

$$u = \frac{3}{2} \frac{\bar{H}c}{\pi a} \frac{\mu}{\mu'} \frac{\rho_o^2}{e\rho_o} \cdot \frac{e^\rho}{\rho\sqrt{2}} \cdot e^{-i(\rho_o-\rho)-\frac{3\pi}{4}i} \sin \theta.$$

A la surface de la sphère ($\rho = \rho_0$), le courant est décalé sur le champ d'un angle de $\frac{3}{4}\pi$. Sa valeur est

$$u_0 = \frac{3}{2} \frac{\bar{H}c}{\pi} \cdot \frac{\mu'}{\mu} \cdot \frac{\delta}{\sqrt{2}} e^{-\frac{3}{4}\pi i} \sin \theta.$$

Le courant de surface est donc indépendant du rayon dans l'hypothèse susdite de ρ_0 grand. Si $\mu = \mu'$, nous pouvons comparer sa valeur à celle trouvée au chap. I § 1 pour le conducteur semi-infini limité par un plan ; nous voyons que le coefficient m prend ici la valeur $3/2$. Puisque m n'est pas égal à l'unité, on vérifie ainsi que la détermination des courants induits de surface H. F. n'est pas un problème local ; il faut tenir compte du champ résultant des courants induits sur toute la surface.

En outre, la courbure de la sphère introduit une diminution de l'amortissement en profondeur.

Posons $\rho_0 - \rho = z$ en supposant z petit devant ρ_0 .

On peut dès lors écrire la relation asymptotique

$$\frac{e^\rho}{2\rho} \rightarrow \frac{1}{2\rho_0} e^{(\rho_0 - z)} \left(1 + \frac{z}{\rho_0}\right),$$

d'où

$$u = \frac{3\bar{H}c\delta}{2\sqrt{2}\pi} \cdot \frac{\mu'}{\mu} \cdot e^{-z} \left(1 + \frac{z}{\rho_0}\right) e^{-(z + \frac{3}{4}\pi)i} \sin \theta.$$

Il résulte de la comparaison avec l'expression trouvée pour le courant dans le conducteur plan semi-infini que le facteur correctif dû à la courbure est $\left(1 + \frac{z}{\rho_0}\right)$ en première approximation. Comme il est réel, l'amortissement est seul affecté ; *la chute d'amplitude de l'onde avec sa pénétration est moins grande que dans le cas d'une surface plane.*

Ces formules asymptotiques nous montrent encore que le retard de phase croît de la périphérie vers le centre proportionnellement à la distance, en première approximation.

Il existe par conséquent une propagation des champs et des courants sous forme d'onde avec vitesse de phase et amortissement (de la surface vers l'intérieur). La longueur d'onde est donnée par

$$\lambda = \frac{2\pi}{\delta} = c \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma\mu\omega}}.$$

Supposons maintenant que ρ_0 soit petit, c'est-à-dire que l'une des grandeurs, rayon, conductibilité ou fréquence soit suffisamment petite.

Dans ces conditions, on peut écrire en première approximation

$$g\left(\rho_o \frac{\mu}{\mu'}\right) e^{\psi i} = \frac{\frac{\rho}{3} \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4} i}}{\left[\left(\frac{\mu}{\mu'} - 1\right) \frac{1}{3} + \frac{\mu}{\mu'}\right] \rho_o \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4} i}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{r}{a} e^{-\frac{\pi}{2} i}}{\frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{\mu'} - 1\right) + \frac{\mu}{\mu'}}$$

Le courant s'en déduit par

$$u = \frac{\gamma \mu \omega \bar{H} r \sin \theta}{2c \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{\mu'} - 1 \right) + \frac{\mu}{\mu'} \right]} e^{-\frac{\pi}{2} i}$$

Si $\mu = \mu'$,

$$u = \frac{\gamma \mu \omega \bar{H}}{2c} r \sin \theta e^{-\frac{\pi}{2} i}$$

Perte par effet Joule

Elle se calcule aisément par l'application du théorème de Poynting. La puissance traversant la surface de la sphère vers l'intérieur vaut

$$W = \frac{c}{8\pi} \int_s |E| |\Pi_{\theta e} + H_{\theta}| \cos (E, H_{\theta e} + \bar{H}_{\theta}) dS,$$

l'intégrale étant étendue à toute la surface de la sphère.

Posons
$$K = \left| \frac{\mu}{\mu'} f(\rho_o) e^{i(\psi_o + \frac{\pi}{2})} - 1 \right| \left| \frac{f(\rho_o) e^{i\psi_o}}{g\left(\rho_o \frac{\mu}{\mu'}\right)} \right|$$

$$\xi = \arg \left[\frac{\mu}{\mu'} \frac{f(\rho_o)}{g\left(\rho_o \frac{\mu}{\mu'}\right)} e^{i(\psi_o + \frac{\pi}{2})} - 1 \right]$$

$$\chi = \arg \left(\frac{f(\rho_o)}{g\left(\rho_o \frac{\mu}{\mu'}\right)} e^{i\psi_o} \right)$$

d'où

$$W = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{\bar{H}^2 a \omega \mu}{8\pi} K \cos (\xi - \chi) \int_s \sin^2 \theta dS$$

$$\int_s \sin^2 \theta dS = 2 \pi a^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta a \theta = \frac{8 \pi a^2}{3}$$

$$\frac{W}{\bar{H}^2 \mu a^2 \omega} = \frac{3}{4} K \cos(\xi - \chi) = F\left(\rho_o \frac{\mu}{\mu'}\right).$$

L'étude de la perte par effet Joule se réduit à celle d'une fonction de deux variables $F\left(\rho_o \frac{\mu}{\mu'}\right)$.

La valeur asymptotique de cette fonction pour ρ_o grand, se calcule facilement. On trouve

$$F\left(\rho_o \frac{\mu}{\mu'}\right)_{\rho_o \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{3}{8} \frac{\mu'}{\rho_o \mu},$$

d'où pour W l'expression de la perte en H. F.

$$W = \frac{3}{8} \bar{H}^2 a^2 \frac{\mu'}{\mu} c \sqrt{\frac{\mu \omega}{2 \pi \gamma}}.$$

Cette expression, où la perte par effet Joule est proportionnelle à la racine carrée de la fréquence, caractérise les phénomènes de Skin effect.

Le calcul de W , lorsque ρ_o est petit, s'effectue plus rapidement par la méthode directe d'intégration dans le volume. La perte dans l'élément de volume étant

$$dW = \frac{|u|^2}{2\gamma} dv,$$

on trouve par intégration dans la sphère

$$W = \frac{1}{2} \frac{\gamma^2 \omega^2 \mu^2 \bar{H}^2}{4 c^2 \gamma \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{\mu'} - 1 \right) + \frac{\mu}{\mu'} \right]^2} \int_v r^2 \sin^2 \theta dv,$$

$$\int_v r^2 \sin^2 \theta dv = \frac{4}{15} a^5,$$

$$W = \frac{\pi}{15 c^2} \frac{\bar{H}^2 a^5 \gamma \omega^2 \mu^2}{\left[\frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{\mu'} - 1 \right) + \frac{\mu}{\mu'} \right]^2},$$

$$F\left(\rho_o \frac{\mu}{\mu'}\right) = \frac{\rho_o^2}{30 \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{\mu'} - 1 \right) + \frac{\mu}{\mu'} \right]^2}.$$

III. — ÉTUDE PARTICULIÈRE DES COURANTS DE FOUCAULT DANS LES FEUILLES MINCES

Le problème de la détermination de ces courants se simplifie en général si le conducteur se réduit à une feuille suffisamment mince de conducti-

bilité imparfaite. On peut alors dans certains cas considérer le courant comme réparti uniformément dans l'épaisseur de la feuille et remplacer celle-ci au point de vue mathématique par une surface géométrique où la densité de courant est infinie par unité de surface et finie par unité de longueur.

Appelons u la densité de courant par unité de longueur et σ la conductibilité également par unité de longueur.

Si ϵ représente l'épaisseur de la plaque, il vient

$$\begin{aligned} \sigma &= \epsilon \tau, \\ u &= \sigma \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Pour contrôler si l'hypothèse de l'uniformité de courant en profondeur est légitime, il suffit d'appliquer la formule trouvée au § 1 donnant le courant dans le conducteur plan semi-infini. Pour que l'erreur soit inférieure à $1/100^e$, il suffit qu'on ait

$$\left[e^{-\frac{\delta \epsilon}{\epsilon}} \right]_{\epsilon}^0 = 1 - e^{-\delta \epsilon} < \frac{1}{100}, \quad \text{soit } \delta \epsilon < 0,01.$$

Pour que l'erreur soit inférieure à $1/10^e$ $\delta \epsilon < 0,105$.

Si le conducteur est en cuivre et la période de 50/sec., δ vaut 1,088. On peut donc dans ce cas, à l'approximation de $1/10^e$, considérer comme mince une feuille de cuivre de 1 mm d'épaisseur.

Il existe un potentiel magnétique scalaire (multiforme) en dehors du conducteur.

Nous allons établir une condition aux limites, spéciale aux feuilles minces, à laquelle doit satisfaire le potentiel du champ magnétique total.

Considérons le courant u en un point O de la surface, l'axe des z étant dirigé suivant la normale positive, H_{1t} et H_{2t} les composantes tangentielles normales à u du champ magnétique dû aux courants et relatives respectivement aux côtés 1 et 2 de la surface. Soit \bar{H} le champ magnétique inducteur. Il vient

$$\text{Curl}_z \mathcal{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (H_z - \bar{H}_z)$$

$$(H_1 - H_2)_t = \frac{4\pi u}{c}$$

Le vecteur $(H_1 - H_2)_t$ perpendiculaire à u représente bien la seule discontinuité du champ, comme on peut s'en assurer en calculant les circulations.

Ces équations peuvent s'écrire

$$\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (H_z + \bar{H}_z)$$

$$H_{1x} - H_{2x} = \frac{4\pi u_y}{c}$$

$$H_{1y} - H_{2y} = -\frac{4\pi u_x}{c}$$

d'où l'on tire après élimination des u

$$\frac{c}{4\pi\sigma} \left(\frac{\partial H_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial H_{1y}}{\partial y} - \frac{\partial H_{2x}}{\partial x} - \frac{\partial H_{2y}}{\partial y} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (H_z + \bar{H}_z)$$

Or, sur chacun des côtés de la surface on peut appliquer l'équation $\text{div H} = 0$

$$\frac{\partial H_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial H_{1y}}{\partial y} = -\frac{\partial H_{1z}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial H_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial H_{2y}}{\partial y} = -\frac{\partial H_{2z}}{\partial z}$$

En reportant ces valeurs dans l'équation précédente et remplaçant z par la dérivée normale,

$$\frac{\partial H_{2n}}{\partial n} - \frac{\partial H_{1n}}{\partial n} + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (H + \bar{H})_n = 0.$$

Il faut de plus que les composantes normales soient continues.

$$H_{1n} = H_{2n}$$

Si les champs sont sinusoïdaux, la valeur instantanée du champ inducteur vaut la partie réelle de $\bar{H}e^{i\omega t}$; il vient alors

$$\frac{\partial H_{2n}}{\partial n} - \frac{\partial H_{1n}}{\partial n} + i \frac{4\pi\sigma\omega}{c^2} (\Pi + \bar{\Pi})_n = 0.$$

Posons
$$\beta = \epsilon\delta^2 = \frac{2\pi\sigma\omega}{c^2}.$$

Soit V le potentiel du champ magnétique dû à la « nappe » de courants et \bar{V} celui du champ inducteur, la condition sur la surface s'écrit

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial n^2} + 2i\beta \frac{\partial}{\partial n} (V + \bar{V}) = 0$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial n} = \frac{\partial V_2}{\partial n_2} = \frac{\partial V}{\partial n}$$

Le problème revient ainsi à trouver un potentiel V satisfaisant à cette condition, continu et fini en dehors du conducteur et dont les dérivées premières s'annulent à l'infini.

Cylindre circulaire conducteur mince plongé dans un champ uniforme alternatif sinusoïdal perpendiculaire à ses génératrices.

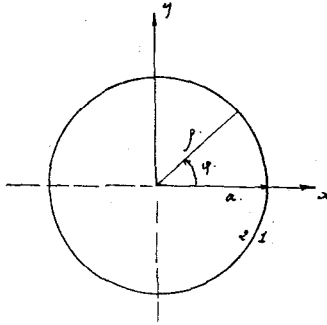


FIG. 4

Appliquons les considérations précédentes au calcul des courants induits dans un tel cylindre de rayon a . L'axe des z coïncide avec l'axe du cylindre ; l'axe des x est supposé parallèle à H . On a donc $V = -\bar{H}_x$.

Soit, en adoptant les coordonnées polaires $(\rho\varphi)$ planes,

$$\bar{V} = -\bar{H} \rho \cos \varphi.$$

Il est possible de satisfaire aux conditions générales, à l'aide de deux potentiels extérieur et intérieur très simples.

$$V_1 = \frac{A \cos \varphi}{\rho}$$

$$V_2 = B \rho \cos \varphi.$$

Les conditions à la surface deviennent

$$-2A \cos \varphi a^{-3} + 2\beta i (B \cos \varphi - \bar{H} \cos \varphi) = 0$$

$$-A \cos \varphi a^{-2} = B \cos \varphi,$$

d'où l'on tire

$$A = \frac{-\bar{H} a^2}{1 - \frac{i}{\beta a}} \quad B = \frac{H}{1 - \frac{i}{\beta a}}$$

Les potentiels sont donc

$$V_1 = \frac{-H a^2}{1 - \frac{i}{\beta a}} \frac{x}{\rho^2} \quad V_2 = \frac{\bar{H} x}{1 - \frac{i}{\beta a}}$$

Tous les champs sont en phase. Le champ intérieur H_2 est uniforme et s'oppose au champ inducteur.

$$H_2 = \frac{-\bar{H}}{1 + \frac{1}{(\beta a)}} \left[1 + \frac{i}{\beta a} \right]$$

Le retard ψ sur le champ inducteur est

$$\psi = \pi - \text{arc tg } \frac{1}{\beta a}$$

Lorsque $\sigma\omega a \rightarrow \infty$, $H_2 = -\bar{H}$, le champ total intérieur est nul.

Les composantes du champ extérieur dû aux courants sont

$$H_{1x} = \frac{-\bar{H}}{1 + \left(\frac{1}{\beta a}\right)} \left(1 - \frac{i}{\beta a}\right) \left(\frac{2x^2 a^2}{\rho^4} - \frac{a^2}{\rho^2}\right)$$

$$H_{1y} = \frac{-\bar{H}}{1 + \left(\frac{1}{\beta a}\right)^2} \left(1 + \frac{i}{\beta a}\right) \frac{2a^2 xy}{\rho^4}$$

Comme tous les champs sont en phase, les lignes de force dues aux courants ne se déforment pas.

Le lieu des points où $H_{1x} = 0$ est donné par

$$\frac{2x^2}{\rho^2} = 1 \quad \cos \varphi = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Calcul du courant.

En vertu des équations générales $(H_1 - H_2)_t = \frac{4\pi u}{c}$

d'où l'on tire

$$-\frac{1}{a} \left[\frac{\partial V_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_2}{\partial \varphi} \right]_{r=a} = - \left[-\frac{A}{a} \sin \varphi + Ba \sin \varphi \right] \frac{1}{a} = \frac{4\pi u}{c}$$

$$u = -\frac{c}{2\pi} \frac{\bar{H}}{1 - \frac{i}{\beta a}} \sin \varphi.$$

Le courant tend vers une limite $u = -\frac{c}{2\pi} \bar{H} \sin \varphi$, lorsque $\sigma\omega a$ tend vers l'infini dans les limites d'applicabilité de la formule.

Il retarde de π sur le champ inducteur.

Lorsque $\sigma\omega a$ tend vers 0,

$$u = -\frac{\sigma\omega a}{c} \bar{H} i.$$

Le courant est alors en retard de $\frac{\pi}{2}$ sur le champ inducteur.

Effet Joule par unité de longueur du cylindre.

Posons
$$K = \frac{c^2}{4\pi^2} \frac{1}{1 + \beta^2 a^2}.$$

Le carré de $|u|$ est égal au produit des valeurs conjuguées de u d'où
$$|u|^2 = \bar{H}^2 K \sin^2 \varphi.$$

L'effet Joule par unité de longueur vaut donc

$$W = \frac{\bar{H}^2 K a}{2\sigma} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{K}{\sigma} a \bar{H}^2.$$

Pour les grandes valeurs de $\sigma \omega a$,

$$W = \frac{c^2}{8\pi\sigma} \bar{H}^2 a.$$

Pour les faibles valeurs de $\sigma \omega a$,

$$W = \frac{\pi}{2c^2} \bar{H}^2 \omega^2 \sigma a^3.$$

Sphère conductrice creuse et mince plongée dans un champ uniforme alternatif sinusoïdal.

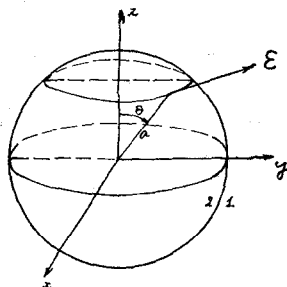


FIG. 5.

Le champ inducteur est supposé parallèle à l'axe des z et le centre de la sphère confondu avec l'origine. Il vient en coordonnées polaires

$$\bar{V} = -\bar{H} r \cos \theta.$$

Montrons que les potentiels sphériques de 1^{re} et 2^{me} espèce et d'ordre 1 sont respectivement les potentiels intérieur et extérieur cherchés

$$V_1 = A_1 \frac{\cos \theta}{r^2},$$

$$V_2 = A_2 r \cos \theta.$$

Les conditions aux limites s'écrivent

$$-\frac{6A_1}{a^4} \cos \theta + 2\beta i (A_2 \cos \theta - \bar{H} \cos \theta),$$

$$-\frac{2A_1}{a^3} \cos \theta = A_2 \cos \theta,$$

d'où l'on tire

$$A_1 = -\frac{1}{2} \frac{\bar{H} a^3}{1 - \frac{3}{2} \frac{i}{\beta a}}, \quad A_2 = \frac{\bar{H}}{1 - \frac{3}{2} \frac{i}{\beta a}}.$$

Les potentiels extérieur et intérieur ont donc pour expression

$$V_1 = -\frac{1}{2} \frac{\bar{H} a^3}{1 - \frac{3}{2} \frac{i}{\beta a}} \frac{z}{r^3}, \quad V_2 = \frac{\bar{H}}{1 - \frac{3}{2} \frac{i}{\beta a}} z.$$

Le champ intérieur dû aux courants est donc uniforme

$$H_2 = \frac{-\bar{H}}{1 - \frac{3}{2} \frac{i}{\beta a}}.$$

Il s'oppose au champ inducteur et retarde sur lui d'un angle

$$\varphi = \pi - \text{arc tg} \left(\frac{3}{2} \frac{1}{\beta a} \right).$$

Lorsque $\sigma \omega a$ tend vers l'infini dans les limites d'applicabilité de la formule, le champ intérieur total tend vers 0.

Les composantes du champ extérieur dû aux courants sont

$$H_{1z} = \frac{1}{2} \frac{\bar{H} a^3}{1 - \frac{3}{2} \frac{i}{\beta a}} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right)$$

$$H_{1x} = \frac{1}{2} \frac{-\bar{H} a^3}{1 - \frac{3}{2} \frac{i}{\beta a}} \frac{3zx}{r^5}$$

$$H_{1y} = \frac{1}{2} \frac{-\bar{H} a^3}{1 - \frac{3}{2} \frac{i}{\beta a}} \frac{3zy}{r^5}.$$

La composante H_{1z} s'annule sur le cône

$$1 = \frac{3z^2}{r^2}$$

de demi-ouverture

$$\alpha = \text{arc sin } \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{arc tg } \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Calcul du courant.

On trouve de la même manière que pour le cylindre

$$u = - \frac{3c}{8\pi} \frac{\bar{H}}{1 - \frac{3}{2} \frac{i}{\beta a}} \sin \theta.$$

Il tend vers une limite $u = - \frac{3}{8} \frac{c}{\pi} \bar{H} \sin \theta$, lorsque $\sigma \omega a$ tend vers l'infini. Il retarde alors de π sur le champ inducteur.

Lorsque $\sigma \omega a$ est petit,

$$u = \frac{1}{2} \frac{\sigma a \omega \mu}{c^2 i} H \sin \theta,$$

son retard sur le champ inducteur vaut $\frac{\pi}{2}$.

Effet Joule.

Posons
$$\frac{9c^2}{64\pi^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{3}{2} \frac{1}{\beta a}\right)^2} = K.$$

Procédant comme pour le cylindre, il vient pour l'expression de l'effet Joule

$$W = \bar{H}^2 K \frac{\pi a^2}{\sigma} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3} \frac{K \pi a^2}{\sigma} \bar{H}^2.$$

Pour $\sigma \omega a$ grand, •

$$W = \frac{3a^2 c^2}{16\pi\sigma} \bar{H}^2.$$

Pour $\sigma \omega a$ petit,

$$W = \frac{\pi}{3c^2} \sigma \omega^2 \mu^2 a^4 \bar{H}^2.$$

Plaque mince indéfinie dans un champ limité.

Considérons un champ magnétique alternatif traversant une plaque conductrice mince plane et indéfinie. Supposons, en outre, que le champ s'annule assez rapidement à l'infini pour que les courants induits restent bornés.

Exprimons la condition générale

$$(1) \quad \frac{\partial^2 V_2}{\partial n^2} - \frac{\partial V_1^2}{\partial n^2} + 2\beta i \frac{\partial}{\partial n} (V + \bar{V}) = 0.$$

Par suite de la symétrie,

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial n^2} = - \frac{\partial^2 V_2}{\partial n^2}.$$

Prenons le plan de la plaque comme plan des xy , l'axe des z étant dirigé suivant la normale positive. La condition à la surface devient

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \beta i \frac{\partial}{\partial z} (V + \bar{V}) = 0, \quad \text{avec} \quad \frac{2 \pi \sigma \omega}{c^2} = \beta = \epsilon \delta^2.$$

Nous devons construire un potentiel V qui satisfait à cette condition pour $z > 0$ régulier et fini dans tout le demi-espace extérieur à la plaque et s'annulant à l'infini, ainsi que ses dérivées premières. Supposons que

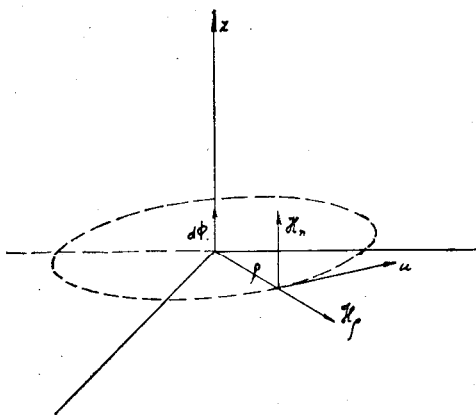


FIG. 6.

le champ inducteur présente une symétrie axiale autour de l'axe des z . La solution doit alors satisfaire à l'équation du potentiel en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Adoptons une solution du type

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a_n z} J_0(a_n \rho).$$

On peut l'écrire sous la forme

$$V = \int_0^{\infty} \lambda(\eta) d\eta \int_0^{\infty} e^{-\eta z} \varphi(r) J_0(\eta \rho) J_0(\eta r) r dr,$$

où $\varphi(r)$ et $\lambda(\eta)$ sont des fonctions arbitraires. L'élément différentiel de l'intégrale double $\lambda(\eta) \varphi(r) J_0(\eta r) r dr d\eta$ joue ici le rôle des constantes A_n de la série.

Cherchons à déterminer les fonctions arbitraires $\lambda(\eta)$ et $\varphi(r)$, de manière à satisfaire à la condition (1). Celle-ci s'écrit, en dérivant sous le signe et en posant $z = 0$,

$$(2) \int_0^\infty \lambda(\eta) [\eta^2 + \beta i \eta] d\eta \int_0^\infty \varphi(r) J_0(\eta\rho) J_0(\eta r) r dr - \beta i \frac{\partial}{\partial z} [\bar{V}(\rho z)]_{z=0} = 0.$$

On peut choisir $\lambda(\eta)$ et $\varphi(r)$ de telle manière que cette équation devienne une identité. Il existe, en effet, pour la fonction J_0 une intégrale double analogue à celle de Fourier.

$$f(z) = \int_0^\infty \eta d\eta \int_0^\infty f(Z) J_0(z\eta) J_0(Z\eta) Z dZ.$$

On démontre aisément cette formule en se basant sur la valeur asymptotique de J_0 et, en partant du développement de $f(z)$, en série de fonctions J_0 .

Pour que la condition (2) devienne une identité, il suffit donc de poser

$$\lambda(\eta) = \frac{1}{\eta + i\beta}$$

$$\varphi(r) = \beta i \frac{\partial}{\partial z} [\bar{V}(rz)]_{z=0}$$

Le potentiel cherché a donc pour valeur

$$V(\beta z) = \int_0^\infty \frac{d\eta}{\eta + i\beta} \int_0^\infty e^{-\eta z} \left[\beta i \frac{\partial}{\partial z} \bar{H}(rz) \right]_{z=0} J_0(\eta\rho) J_0(\eta r) r dr;$$

or
$$-\frac{\partial}{\partial z} \bar{V} = [\bar{V}_z]_{z=0},$$

composante normale du champ inducteur sur la plaque.

$$V(\rho z) = \beta i \int_0^\infty \frac{d\eta}{\eta + i\beta} \int_0^\infty e^{-\eta z} [-\bar{H}_z(rz)]_{z=0} J_0(\eta\rho) J_0(\eta r) r dr$$

La solution ne dépend que de la composante normale du champ inducteur sur la plaque.

Dans toutes ces expressions $[H_z]_{z=0}$ est supposé suffisamment petit à l'infini pour que les intégrales convergent uniformément.

Les composantes normale et tangentielle du champ dû aux courants valent à la surface de la plaque

$$[H_z]_{z=0} = - \left[\frac{\partial V}{\partial z} \right]_{z=0} = - \beta i \int_0^\infty \frac{\eta d\eta}{\eta + i\beta} \int_0^\infty [\bar{H}_z(rz)]_{z=0} J_0(\eta\rho) J_0(\eta r) r dr$$

$$[H_\rho]_{z=0} = - \left[\frac{\partial V}{\partial \rho} \right]_{z=0} = \beta i \int_0^\infty \frac{\eta d\eta}{\eta + i\beta} \int_0^\infty [\bar{H}_r(rz)]_{z=0} J_0(\eta\rho) J_0(\eta r) r dr.$$

Afin de pouvoir résoudre le cas général où le champ n'est pas à symétrie de révolution, nous allons rechercher une solution fondamentale, correspondant à un champ inducteur localisé à l'origine.

Supposons donc que $[\bar{H}_z]_{z=0}$ tombe à zéro à une distance τ extrêmement réduite de l'origine.

$$[H_\rho]_{z=0} = \beta i \int_0^\infty \frac{\eta d\eta}{\eta + i\beta} \int_0^\tau [\bar{H}_z(rz)]_{z=0} J'_o(\eta\rho) J_o(\eta r) r dr.$$

Nous pouvons imaginer mathématiquement que cette chute à zéro se produit brusquement et que le champ est constant de valeur \bar{H} dans l'intervalle $(0, \tau)$. Il vient alors

$$[H_\rho]_{z=0} = \bar{H}\beta i \int_0^\infty \frac{\eta d\eta}{\eta + i\beta} \int_0^\tau J'_o(\eta\rho) J_o(\eta r) r dr.$$

Considérons une valeur η_1 donnée de η . On peut toujours choisir τ suffisamment petit de manière que $J_o(\eta r)$ diffère aussi peu qu'on veut de l'unité, pour $0 < r < \tau$ $\eta < \eta_1$.

On peut donc écrire

$$\int_0^\tau J_o(\eta r) r dr = J_o \int_0^\tau r dr = J_o \frac{\tau^2}{2} = J_o \frac{s}{2\pi}.$$

\bar{J}_o étant une valeur moyenne de $J_o(\eta r)$ dans l'intervalle, elle est aussi proche qu'on veut de l'unité.

s est l'aire du cercle de rayon τ .

Or, on peut écrire

$$[H_\rho]_{z=0} = \lim_{\eta_1 \rightarrow \infty} \bar{H}\beta i \int_0^{\eta_1} \frac{\eta d\eta}{\eta + i\beta} J'_o(\eta\rho) \int_0^\tau J_o(\eta r) r dr$$

qui diffère donc aussi peu qu'on le désire de

$$\frac{\bar{H}s\beta i}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\eta d\eta}{\eta + i\beta} J'_o(\eta\rho)$$

$\bar{H}s$ est le flux élémentaire $d\Phi$ passant par l'origine

$$[H_\rho]_{z=0} = \frac{d\Phi}{2\pi} \beta i \int_0^\infty \frac{\eta d\eta}{\eta + i\beta} J'_o(\eta\rho).$$

Nous pouvons en déduire la valeur du courant par l'équation

$$(H_1 - H_2)_t = \frac{4\pi u}{c}$$

Par suite de la symétrie, $H_{1t} = -H_{2t}$

d'où

$$H_{1t} = [H_\rho]_{z=0} = \frac{2\pi u}{c}$$

et la valeur du courant

$$u = \frac{cd\Phi\beta i}{4\eta^2} \int_0^\infty \frac{\eta J_0'(\eta\rho)}{\eta + i\beta} d\eta.$$

Tout ce qui précède suppose la convergence uniforme de cette intégrale. En la calculant nous allons montrer que cette hypothèse est bien légitime.

L'intégrale peut encore s'écrire

$$u = -\frac{cd\Phi\beta i}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{\eta J_1(\eta\rho)}{\eta + i\beta} d\eta;$$

posons

$$\eta = \beta t \quad x = \beta\rho$$

Il vient

$$u = -\frac{\beta^2 cd\Phi i}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{t J_1(xt)}{t + i} dt.$$

La question revient à résoudre

$$I = \int_0^\infty \frac{t J_1(xt) dt}{t + i} = \int_0^\infty J_1(xt) dt - i \int_0^\infty \frac{J_1(xt) dt}{t + i}$$

$$I = \frac{1}{x} + \int_0^\infty \frac{J_1(xt) dt}{t^2 + 1} - i \int_0^\infty \frac{t J_1(xt) dt}{t^2 + 1}$$

Posons

$$Y(x) = \int_0^\infty \frac{J_1(xt) dt}{t^2 + 1}$$

$$Z(x) = \int_0^\infty \frac{t J_1(xt) dt}{t^2 + 1}$$

Nous allons d'abord étudier ces intégrales au point de vue convergence, valeur à l'origine et à l'infini.

Étude de Y(x)

Cette intégrale est absolument et uniformément convergente quel que soit x . L'expression $\frac{1}{1+t^2}$ étant une fonction majorante de $\left| \frac{J_1(xt)}{1+t^2} \right|$, il vient

$$\left| \int_0^\infty \frac{J_1(xt)}{1+t^2} dt \right| < \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

L'intégrale est donc fonction continue de x .

Elle est nulle pour $x = 0$ et $x = \infty$.

Les deux premières dérivations par rapport à x sous le signe intégral, sont légitimes, car les intégrales obtenues convergent uniformément sauf au voisinage de $x = 0$.

En effet,

$$J_1(x)_{xt \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{\sin\left(xt - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi xt}} \quad J_1'(x)_{xt \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{\cos\left(xt - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi xt}}$$

$$J_1''(x)_{xt \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{-\sin\left(xt - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi xt}}.$$

Dès lors, si nous supposons $x < \epsilon$, on peut écrire l'inégalité suivante à partir d'une certaine valeur T de t :

$$\left| \frac{t J_1'(x) dt}{1+t^2} \right| < \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}} \cdot \frac{1}{t\sqrt{t}}, \quad \text{or} \quad \int_T^\infty \frac{dt}{t\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{T}}.$$

Il vient donc, puisque l'intégrale converge uniformément pour $x > \epsilon$,

$$Y'(x) = \int_0^\infty \frac{t J_1'(x)}{1+t^2} dt, \quad \text{où} \quad Y'(x) = \frac{d}{dx} Y(x).$$

L'intégrale suivante jouit de la même propriété.

$$\int_0^\infty \frac{t^2 J_1''(x) dt}{1+t^2} = \int_0^\infty J_1''(x) dt - \int_0^\infty \frac{J_1'(x) dt}{1+t^2}$$

$$\int_0^\infty J_1''(x) dt = \frac{1}{x} \left[J_1'(x) \right]_0^\infty = \frac{1}{2x}$$

$\int_0^\infty \frac{J_1''(x) dt}{1+t^2}$ est uniformément convergente, car

$$\left| \frac{J_1''(x)}{1+t^2} \right| < \frac{1}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

Il vient donc, par suite de la convergence uniforme,

$$Y''(x) = \int_0^\infty \frac{t^2 J_1''(x) dt}{1+t^2}$$

Étude de $Z(x)$

Posons

$$X = - \int_0^\infty \frac{J_0(tx)}{1+t^2} dt$$

Cette intégrale converge absolument et uniformément, car

$$\left| \frac{J_0(tx)}{1+t^2} \right| < \frac{1}{1+t^2}, \quad \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

D'autre part, considérons

$$Z = \int_0^\infty \frac{t J_1(tx) dt}{1+t^2},$$

elle converge aussi absolument et uniformément pour $x > \epsilon$, car on peut écrire à partir d'une certaine valeur de T

$$\left| \frac{t J_1(tx)}{1+t^2} \right| < \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \pi x t \sqrt{t}},$$

et

$$\int_T^\infty \frac{dt}{t \sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{T}}.$$

On en conclut $X' = Z$.

Le calcul de Z se réduit ainsi à celui de X .

Considérons encore

$$\int_0^\infty \frac{t^2 J_1'(tx)}{1+t^2} dt = \int_0^\infty J_1'(tx) dt - \int_0^\infty \frac{J_1'(tx)}{1+t^2} dt,$$

or

$$\int_0^\infty J_1'(tx) dt = \frac{1}{x} [J_1(tx)]_0^\infty = 0, \quad \frac{J_1'(tx)}{1+t^2} < \frac{1}{1+t^2}, \quad \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

L'expression considérée est encore uniformément convergente pour $x > \epsilon$, et l'on a

$$X''(x) = \int_0^\infty \frac{t^2 J_1'(tx)}{1+t^2} dt.$$

On voit facilement que Z s'annule lorsque x devient infini ; et pour $x = 0$. Mais elle est discontinue en ce dernier point.

Nous allons montrer que $Z(x)$ tend vers l'unité pour x tendant vers zéro :

$$Z(x) = \int_0^\infty \frac{J_1(tx) t}{1+t^2} dt = \int_0^\infty \frac{J_1(\alpha) \alpha}{x^2 + \alpha^2} d\alpha = \int_0^\infty \frac{J_1(\alpha)}{\alpha} d\alpha - \int_0^\infty \frac{x^2}{x^2 + \alpha^2} \frac{J_1(\alpha)}{\alpha} d\alpha,$$

or (1)

$$\int_0^\infty \frac{J_1(\alpha)}{\alpha} d\alpha = 1 \text{ et } \left| \frac{J_1(\alpha)}{\alpha} \right| < \frac{1}{2}, \text{ d'où } \int_0^\infty \frac{J_1(\alpha)}{\alpha} \frac{d\alpha}{x^2 + \alpha^2} < \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{x^2 + \alpha^2} = \frac{\pi}{4x}$$

(1) SHAFHEITLIN, Die Theorie der Besselschen Funktionen, S. 70.

de sorte que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + \alpha^2} \frac{J_1(\alpha)}{\alpha} d\alpha = mx, \quad \text{où } m \text{ est fini.}$$

Il vient finalement

$$Z(x) = 1 - mx.$$

Lorsque x tend vers 0, $Z(x)$ tend vers l'unité, mais pour $x = 0$, on a $Z(x) = 0$.

L'intégrale est encore nulle à l'infini. En effet,

$$Z(x) = \int_0^{\infty} \frac{J_1(\alpha) \alpha d\alpha}{x^2 + \alpha^2}.$$

Or, pour x infini, $\left| \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} \right| < N$, arbitrairement petit, d'où

$$\left| Z(x) \right| < N \int_0^{\infty} J_1(\alpha) d\alpha = N.$$

En résumé, $Y(x)$ est nulle et continue pour $x = 0$ et $x = \infty$,

$Z(x)$ » » » $x = \infty$,

$Z(x)$ est discontinue pour $x = 0$,

$Z(x) = 0$ pour $x = 0$,

$Z(x) \rightarrow 1$ pour $x \rightarrow 0$.

Résolution des intégrales.

Nous connaissons deux valeurs de chaque intégrale. Nous allons former des équations différentielles connues du 2^d ordre auxquelles elles satisfont. Déterminant l'intégrale générale, nous calculerons les constantes arbitraires pour les deux valeurs connues de la fonction. Ceci nous donnera la valeur des intégrales définies.

Calcul de $Y(x)$.

On vérifie facilement par dérivation sous le signe intégral que $Y(x)$ satisfait à l'équation

$$Y'' + \frac{1}{x} Y' - Y \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{x};$$

une intégrale particulière en est $\frac{1}{x}$.

L'intégrale générale est donc de la forme

$$Y(x) = A H_1^{(1)}(ix) + B i J_1(ix) + \frac{1}{x} \quad (1)$$

(1) $H_1^{(1)} = J_1(ix) + i N_1(ix)$.

Le fait que $Y(x) \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow \infty$ implique $B = 0$.
Or, lorsque $x \rightarrow 0$,

$$H_1^{(1)}(ix)_{x \rightarrow 0} \rightarrow -\frac{\pi}{2} \frac{1}{x}.$$

Comme $Y(x)$ s'annule pour $x = 0$, on doit avoir $A = \frac{\pi}{2}$.

La valeur cherchée est donc

$$Y(x) = \int_0^\infty \frac{J_1(xt) dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(ix) + \frac{1}{x}.$$

Calcul de Z(x).

La fonction X vérifie l'équation suivante :

$$X'' + \frac{1}{x} X' - X = \int_0^\infty J_0(xt) dt = \frac{1}{x} \int_0^\infty J_0(\alpha) d\alpha = \frac{1}{x} \quad (1)$$

Posons $u_1 = J_0(ix)$

$$u_2 = i \frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(ix)$$

$$u_1' = -i J_1(ix)$$

$$u_2' = \frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(ix)$$

L'intégrale générale de l'équation sans second membre est de la forme

$$Au_1 + Bu_2.$$

La méthode de Lagrange par variation des constantes arbitraires est tout indiquée pour le calcul d'une intégrale particulière.

On trouve ainsi $A'u_1 + B'u_2 = 0$

$$A'u_1' + B'u_2' = \frac{1}{x}.$$

On démontre aisément la relation suivante en partant des équations différentielles

$$u_1' u_2 - u_1 u_2' = \frac{1}{x}$$

d'où $A' = u_2$ $A = \int_a^x u_2 = dx$

$$B' = -u_1 \quad B = - \int_b^x u_1 dx.$$

(1) $\int_0^\infty \tau_0(\alpha) d\alpha = 1$. Cf. SHAFHEITLIN, Theorie der Besselschen Funktionen, S. 70.

$$X = u_1 \int_a^x u_2 dx - u_2 \int_b^x u_1 dx$$

$$Z = X' = -u_2' \int_b^x u_1 dx + u_1' \int_a^x u_2 dx.$$

La condition que Z soit égal à l'unité pour x tendant vers 0 et nul pour x tendant vers l'infini est vérifiée si l'on choisit les constantes a et b

$$a = \infty$$

$$b = 0.$$

Il vient finalement la valeur cherchée de l'intégrale

$$Z = \int_0^{\infty} \frac{J_1(tx) t dt}{1+t^2} = -u_1' \int_{\infty}^x u_2 dx - u_2' \int_0^x u_1 dx.$$

En effectuant numériquement les quadratures, on trouve les valeurs de la fonction données au tableau plus bas.

Calcul du courant.

Nous sommes maintenant en mesure de calculer numériquement les courants

$$I = -\frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(ix) - iZ(x)$$

$$\text{d'où } u = -\frac{\beta^2 c}{4\pi^2} d\Phi \text{ li} = \frac{\beta^2 c d\Phi}{4\pi^2} \left[-Z(x) + i\frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(ix) \right].$$

$$\text{Posons } -Z(x) + i\frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(ix) = \Psi e^{\xi i}.$$

Les valeurs de ces fonctions sont données par le tableau suivant :

x	$-Z(x)$	$\frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(ix)$	Ψ	ξ
0	-1.000	$-\infty \left(-\frac{1}{x} \right)$	$\infty \left(\frac{1}{x} \right)$	-90°
1	-0.468	-0.6019	0.760	-128°
2	-0.234	-0.1399	0.270	$-149^\circ 30'$
3	-0.125	-0.0401	0.131	$-162^\circ 40'$
8	-0.016	-0.0001	0.010	-180°

La valeur asymptotique de Ψ à l'origine est $\frac{1}{x}$.

Ce résultat nous montre que le courant est en retard de 90° sur le champ à l'origine, et par conséquent en phase avec la f. e. m. induite dans la spire

de courant. Par contre, aux grandes distances le courant retarde de 180° sur le champ inducteur, et de 90° sur la f. e. m.

Ceci s'explique par le fait que la self-induction de la spire varie comme le carré de la distance tandis que la résistance lui est simplement proportionnelle.

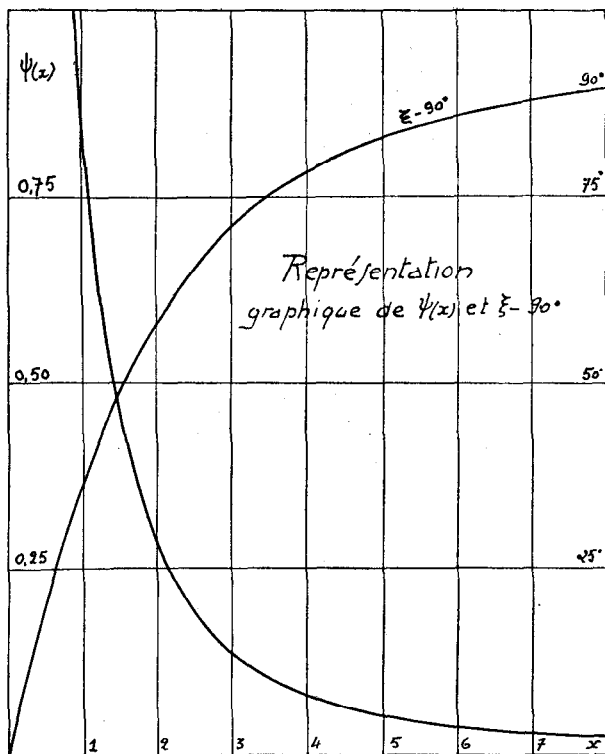


FIG. 7.

Il a été établi plus haut que la formule est applicable à une plaque de cuivre de 1 mm d'épaisseur à la fréquence 50/sec.

$$\delta = 1,088 \text{ cm}^{-1}$$

$$\epsilon = 0,1 \text{ cm}$$

$$\beta = 2\delta^2 = 0,118$$

$$x = \beta\rho = 0,118\rho.$$

Ces résultats font prévoir qu'il n'est pas toujours légitime de considérer comme on le fait parfois en technique (compteurs à induction) que le courant est décalé de 180° sur le champ.

La solution fondamentale que nous avons calculée permet en principe de connaître les courants produits par un champ à symétrie non axiale. Dans bien des cas une intégration graphique rapide permettra d'arriver au résultat.

Resistivity of aqueous
solution is 10^7 the
resistivity of copper

$$\delta \approx \sqrt{\gamma \omega}$$

if γ is multiplied by 10^{-7}

$$\omega = 500 \times 10^6 \text{ cycles}$$

$$50 \times 10^7$$

~~Dividing the~~ $\sqrt{50} \approx 7$
multiplying

$$\delta = \frac{1}{7} \text{ cm}^{-1}$$

The penetration δ of the order
of $\frac{1}{7} \text{ cm}$